第27卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 2
2010年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0333-09

两参数Burr XII分布的经验Bayes检验问题*

韦程东[1]， 陈志强[1,2]， 韦 师[1]， 苏 韩[1]

(1- 广西师范学院数学科学学院，南宁 530023； 2- 南宁市统计局，南宁 530028)

摘 要: Burr XII分布在保险精算、经济学、社会学、环境学等中有着非常重要的应用价值，已经被列入精算师常用的八大分布之中，由此可见对Burr XII分布的研究有着重要的现实意义和理论价值。本文主要对两参数Burr XII分布分别在绝对值损失和加权平方损失下，利用核估计方法构造了参数相应的经验Bayes (EB)单侧和双侧检验函数，证明了所提出的EB检验函数均是渐近最优的并获得了EB检验函数的收敛速度。最后，给出了一个例子，说明适合定理条件的先验分布是存在的。

关键词: Burr XII分布；核估计；经验Bayes检验函数；渐近最优；收敛速度

分类号: **AMS**(2000) 62C12; 62F05 **中图分类号**: O212.1 **文献标识码**: A

1 引言

1942年，Burr基于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}(x)} = F(x)(1-F(x))g(x,F(x))$$

引入了12类分布函数。Burr XII分布就是其中一种，其分布函数和密度函数分别为

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{(1+x^\alpha)^\theta}, \quad x \geq 0, \quad \alpha \geq 1, \quad \theta > 0, \tag{1}$$

$$F'(x) = f(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1}(1+x^\alpha)^{-(1+\theta)}. \tag{2}$$

通常称这个分布为两参数Burr XII分布[1,2]。如果$\alpha > 1$，则密度函数是单峰且为偏态，峰值为

$$x = \Big(\frac{\alpha-1}{\alpha\theta+1}\Big)^{\frac{1}{\alpha}};$$

如果$\alpha = 1$，则密度函数为L型的。该分布已经被列入精算师常用的八大分布之中，引起了人们广泛的注意。

自Robbins[3]提出经验Bayes方法以来，该方法已经有了长足的发展，特别是对指数族的研究，如Johns和Van Ryzin[4,5]分别讨论了离散型和连续型单参数指数族情形的EB单侧检验问题，韦来生[6,7]研究了离散型和连续型单参数指数族情形的EB双侧检验问题，陈家清等[8]对线性指数分布进行了参数的单边和双边EB检验。对于两参数Burr XII分布，Evans和Ragab[9]考虑了在II-型截尾样本下Bayes估计问题，Pathak等[10]研究了加速寿

收稿日期: 2008-11-19. **作者简介**: 韦程东(1965年5月生)，男，硕士，教授. 研究方向：Bayes统计推断.
***基金项目**: 广西科学基金(0575051; 0832108)；广西研究生教育创新计划项目(2008106030701M05; 200910603R05).

命试验中的经验 Bayes 估计问题。本文将讨论两参数 Burr XII 分布的经验 Bayes 单侧和双侧检验问题。

考虑由 (2) 式给出的模型，其中 θ 是未知参数，α 为已知的正常数。其样本空间为 $x \in \Omega = \{x \mid x > 0\}$，参数空间为

$$\Theta = \left\{\theta > 0 : \int_\Omega f(x \mid \theta)\mathrm{d}x = 1\right\}.$$

首先，考虑如下的单侧检验问题

$$H_0 \ : \ \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1 \ : \ \theta > \theta_0, \tag{3}$$

其中 θ_0 为一给定的常数。

对于上述假设检验问题，设损失函数为

$$L_0(\theta, d_0) = a(\theta - \theta_0)I(\theta > \theta_0), \quad L_1(\theta, d_1) = a(\theta_0 - \theta)I(\theta \le \theta_0),$$

其中 a 是大于 0 的常数，$d\{d_0, d_1\}$ 是行动空间，d_0 表示接受 H_0，d_1 表示拒绝 H_0，$I(A)$ 为事件 A 的示性函数。

设参数 θ 的先验分布为 $G(\theta)$ 且为未知。随机化判决函数为

$$\delta(x) = P(\text{接受}\, H_0 \mid X = x), \tag{4}$$

则 $\delta(x)$ 的风险函数为

$$\begin{aligned} R(\delta(x), G(\theta)) &= \int_\Theta \int_\Omega \left[L_0(\theta, d_0)f(x \mid \theta)\delta(x) + L_1(\theta, d_1)f(x \mid \theta)(1 - \delta(x))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}G(\theta) \\ &= a\int_\Omega \beta(x)\delta(x)\mathrm{d}x + C_G, \end{aligned} \tag{5}$$

这里

$$C_G = \int_\Theta L_1(\theta, d_1)\mathrm{d}G(\theta), \quad \beta(x) = \int_\Theta (\theta - \theta_0)f(x \mid \theta)\mathrm{d}G(\theta). \tag{6}$$

令随机变量 X 的边缘分布为

$$f(x) = \int_\Theta f(x \mid \theta)\mathrm{d}G(\theta) = \int_\Theta \theta\alpha x^{\alpha-1}(1 + x^\alpha)^{-(1+\theta)}\mathrm{d}G(\theta), \tag{7}$$

则由 (6) 式计算得

$$\beta(x) = (\varphi(x) - \theta_0)f(x) - \psi(x)f^{(1)}(x), \tag{8}$$

其中 $f^{(1)}(x)$ 是 $f(x)$ 的一阶导数，而

$$\varphi(x) = \frac{\alpha - x^\alpha - 1}{\alpha x^\alpha}, \quad \psi(x) = \frac{1 + x^\alpha}{\alpha x^{\alpha-1}}. \tag{9}$$

特别的，当 $\alpha = 1$，$\varphi(x) = -1$，$\psi(x) = 1 + x$，由 (5) 式可知 Bayes 检验函数为

$$\delta_G(x) = \begin{cases} 1, & \beta(x) \le 0, \\ 0, & \beta(x) > 0, \end{cases} \tag{10}$$

其 Bayes 风险为

$$R(G) = \inf_\delta R(\delta, G) = R(\delta_G, G) = a\int_\Omega \beta(x)\delta_G(x)\mathrm{d}x + C_G, \tag{11}$$

则当先验分布 $G(\theta)$ 已知且 $\delta(x) = \delta_G(x)$ 时，(10) 式可以达到。但 $G(\theta)$ 未知，$\delta_G(x)$ 无实用价值，故而考虑采用经验 Bayes 方法。

2　EB 检验函数的构造

本节将构造参数的EB检验函数，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 为独立同分布样本，有共同的先验分布 $f_G(x)$，其中称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为历史样本，X_{n+1} 为当前样本。为构造 $\beta(x)$ 的估计量，作如下的假定：

(A_1)　$f(x) \in C_{s,\alpha}$，$x \in \mathbf{R}^1$，其中 $C_{s,\alpha}$ 表示 $\mathbf{R}^1$ 中的一族 s 阶导数存在 ($s \geq 3$ 且为正整数)，连续且绝对值不超过 α 的一族概率密度函数。

(A_2)　令 $K_i(x)$, $i = 0, 1, \cdots, s-1$，是 Borel 可测的有界函数，在 (0,1) 之外为零且满足下面的条件

$$\frac{1}{t!}\int_0^1 y^t K_i(y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 1, & t = i, \\ 0, & t \neq i, \quad t = 0, 1, \cdots, s-1. \end{cases} \tag{12}$$

若用 $f^{(0)}(x) = f(x)$，$f^{(i)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的第 i 阶导数，利用核估计方法，对 $i = 0, 1, \cdots, s-1$，定义 $f^{(i)}(x)$ 的核估计为

$$f_n^{(i)}(x) = \frac{1}{nh_n^{1+i}}\sum_{j=1}^n K_i\Big(\frac{X_j - x}{h_n}\Big), \tag{13}$$

则 $f(x)$ 和 $f^{(1)}(x)$ 的核估计分别为

$$f_n^{(0)}(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^n K_0\Big(\frac{X_j - x}{h_n}\Big), \tag{14}$$

$$f_n^{(1)}(x) = \frac{1}{nh_n^2}\sum_{j=1}^n K_1\Big(\frac{X_j - x}{h_n}\Big), \tag{15}$$

这里 $\{h_n\}$ 为一列趋于 0 的正数系列，则 $\beta(x)$ 的估计量为

$$\beta_n(x) = (\varphi(x) - \theta_0)f_n(x) - \psi(x)f_n^{(1)}(x), \tag{16}$$

其中 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 由 (9) 式定义。

则 EB 检验函数可相应的定义为

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1, & \beta_n(x) \leq 0, \\ 0, & \beta_n(x) > 0. \end{cases} \tag{17}$$

在本文中用，E_n 表示对随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布求期望，则 $\delta_n(x)$ 的全面 Bayes 风险为

$$R(\delta_n, G) = a\int_\Omega \beta(x)E\delta_n(x)\mathrm{d}x + C_G. \tag{18}$$

若有

$$\lim_{n\to\infty} R(\delta_n, G) = R(\delta_G, G),$$

则称 δ_n 为渐近最优的 EB 检验函数；若有 $R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) = O(n^{-q})$，则称 EB 检验函数 δ_n 的收敛速度的阶为 $O(n^{-q})$。下面给出本文主要结果所必需的一些引理。

本文中令 c, c_1, $c_2, \cdots$，表示不同的常数，即使在同一表达式中也是如此。

引理 1　设 $f^{(i)}(x)$ 的核估计由 (13) 式定义，对于独立同分布序列 $X_1, X_2, \cdots$，假设条件 (A_1), (A_2) 均成立，则有

(a) 若 $f^{(i)}(x)$ 关于 x 是连续的，则当 $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} nh_n^{2i+1} = \infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} E_n \left| f_n^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right|^2 = 0, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

(b) 若 $f(x) \in C_{s,\alpha}$，则当取 $h_n = n^{-\frac{1}{1+2s}}$ 时，对于 $0 < \lambda \leq 1$，有

$$E_n \left| f_n^{(i)}(x) - f^{(i)}(x) \right|^{2\lambda} \leq cn^{-\frac{2\lambda(s-i)}{1+2s}}, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

证明 (a) 可参见文献 [7] 引理3.2。

(b) 在条件 (A_1) 成立的前提下，只需对文献 [7] 引理3.3中的 $f_\varepsilon(x)$ 和 $f_\varepsilon^{(s)}(x)$ 应用不等式

$$f_\varepsilon(x) \leq c, \quad f_\varepsilon^{(s)}(x) \leq c,$$

即可 (c 为常数)。

引理2[5] 令 $R(\delta_G, G)$ 和 $R(\delta_n, G)$ 分别由 (11) 和 (18) 定义，则有

$$0 \leq R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) \leq a \int_\Omega |\beta(x)|\, p\left(|\beta_n(x) - \beta(x)| \geq |\beta(x)| \right) \mathrm{d}x.$$

3 主要结果

下面我们讨论EB检验函数 $\delta_n(x)$ 的渐近最优性和收敛速度。

定理1 设 EB 检验函数 $\delta_n(x)$ 由 (17) 式定义，对于来自 Burr XII 的独立同分布序列 $X_1, X_2, \cdots$，在条件 (A_1), (A_2) 均成立时，对任意的 $x \in \Omega$，若满足

1) h_n 为一趋于零的正数序列，且 $\lim_{n\to\infty} nh_n^3 = \infty$；

2) $E\theta = \int_\theta \theta \mathrm{d}G(\theta) < \infty$；

3) $f^{(1)}(x)$ 为 x 的连续函数，

则有

$$\lim_{n\to\infty} R(\delta_n, G) = R(\delta_G, G).$$

证明 由引理2得

$$0 \leq R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) \leq a \int_\Omega |\beta(x)|\, p\left(|\beta_n(x) - \beta(x)| \geq |\beta(x)| \right) \mathrm{d}x.$$

若记 $\Phi_n(x) = |\beta(x)|\, p\left(|\beta_n(x) - \beta(x)| \geq |\beta(x)| \right)$，则有 $\Phi_n(x) \leq |\beta(x)|$。

由 Fubini 定理及 $\beta(x)$ 的表达式得

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\beta(x)| \mathrm{d}x \ &\leq \ \int_\Omega \int_\Theta \theta f(x \mid \theta) \mathrm{d}G(\theta) \mathrm{d}x + |\theta_0| \int_\Omega f(x) \mathrm{d}x \\ &= \ \int_\Theta \theta \int_\Omega f(x \mid \theta) \mathrm{d}x \mathrm{d}G(\theta) + |\theta_0| = \int_\Theta \theta \mathrm{d}G(\theta) + |\theta_0| < \infty. \end{aligned}$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) \right) \leq \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) \right) \mathrm{d}x. \tag{19}$$

下面证明 $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = 0$ 对几乎所有的 x 成立。

事实上，由(8)式、(16)式、Markov不等式与Jensen不等式得

$$\begin{aligned}\Phi_n(x) &\le E_n|\beta_n(x)-\beta(x)|\\ &\le |\varphi(x)-\theta_0|E_n|f_n(x)-f(x)|+|\psi(x)|E_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|\\ &\le |\varphi(x)-\theta_0|\left[E_n|f_n(x)-f(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}+|\psi(x)|\left[E_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 由(9)式定义。

由引理1可知

$$当\ i=0\ 时,\quad \lim_{n\to\infty}E_n\left|f_n(x)-f(x)\right|^2=0,$$

$$当\ i=1\ 时,\quad \lim_{n\to\infty}E_n\left|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)\right|^2=0,$$

则有

$$\begin{aligned}0 \le \lim_{n\to\infty}\Phi_n(x) &\le (\varphi(x)-\theta_0)\left[\lim_{n\to\infty}E_n\left|f_n(x)-f(x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\quad+\psi(x)\left[\lim_{n\to\infty}E_n\left|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=0.\end{aligned}\tag{20}$$

将(20)式代入(19)式即可。

定理2　设 EB 检验函数 $\delta_n(x)$ 由 (17) 式定义，对于来自 Burr XII 的独立同分布序列 X_1, $X_2,\cdots$，在条件 (A_1), (A_2) 均成立时，对任意的 $x\in\Omega$, $0<\lambda<1$，若满足

$$\int_\Omega x^{(-\alpha+r)\lambda}|\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty,\quad r=0,1,$$

则当取 $h_n=n^{-\frac{1}{1+2s}}$ 时，有

$$R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)=O\Big(n^{-\frac{\lambda(s-1)}{1+2s}}\Big),$$

其中 $s\ge 2$ 为正整数。

证明　由引理2及Markov不等式

$$\begin{aligned}0 &\le R(\delta_n,G)-R(\delta_G,G)\\ &\le a\int_\Omega|\beta(x)|\,p\left(|\beta_n(x)-\beta(x)|\ge|\beta(x)|\right)\mathrm{d}x\\ &\le a\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}E_n|\beta_n(x)-\beta(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\ &\le c_1\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|\varphi(x)-\theta_0|^\lambda E_n|f_n(x)-f(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\ &\quad+c_2\int_\Omega|\beta(x)|^{1-\lambda}|\psi(x)|^\lambda E_n|f_n^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)|^\lambda\mathrm{d}x\\ &\triangleq S_n+T_n\end{aligned}\tag{21}$$

另一方面，由引理2及定理的条件得

$$S_n \le c_1 n^{-\frac{\lambda s}{1+2s}} \int_\Omega |\varphi(x) - \theta_0|^\lambda |\beta(x)|^{1-\lambda} \mathrm{d}x \le c_3 n^{-\frac{\lambda s}{1+2s}}, \tag{22}$$

$$T_n \le c_2 n^{-\frac{\lambda(s-1)}{1+2s}} \int_\Omega |\psi(x)|^\lambda \beta(x)|^{1-\lambda} \mathrm{d}x \le c_4 n^{-\frac{\lambda(s-1)}{1+2s}}, \tag{23}$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 由 (9) 式定义，且经过简单变形有

$$\varphi(x) = \frac{\alpha-1}{\alpha} x^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}, \quad \psi(x) = \frac{1}{\alpha}\big(x^{-\alpha+1} + x^{-1}\big),$$

这里 $\alpha \ge 1$。将 (22)、(23) 代入 (21) 有

$$R(\delta_n, G) - R(\delta_G, G) = O\Big(n^{-\frac{\lambda(s-1)}{1+2s}}\Big).$$

4 双侧检验问题

下面将探讨参数 θ 的EB双侧检验问题。考虑由 (2) 式给出的模型中参数 θ 的双侧假设检验

$$H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_1 \quad 或 \quad \theta > \theta_2, \tag{24}$$

其中 θ_1, θ_2 为给定的常数。显然，若取

$$\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad \gamma_0 = \frac{\theta_2 - \theta_2}{2}$$

时，(24) 式与下式等价

$$H_0^* : |\theta - \theta_0| \le \gamma_0 \leftrightarrow H_1^* : |\theta - \theta_0| > \gamma_0. \tag{25}$$

关于上述检验问题 (25)，设损失函数为

$$L_i(\theta, d_i) = (1-i)a\big[(\theta-\theta_0)^2 - \gamma_0^2\big] I_{[|\theta-\theta_0| > \gamma_0]} + ia\big[\gamma_0^2 - (\theta-\theta_0)^2\big] I_{[|\theta-\theta_0| \le \gamma_0]}, \quad i = 0, 1,$$

这里 a 为一大于零的常数，$d = d_0, d_1$ 是行动空间，d_0 表示接受 H_0^*，d_1 表示拒绝 H_0^*，令参数的先验分布为 $G(\theta)$ 且未知。则随机化判决函数为

$$\delta^*(x) = P\big\{ 接受\, H_0^* \mid X = x \big\}. \tag{26}$$

与上文类似可得到 $\delta^*(x)$ 的风险函数为

$$R\big(\delta^*(x), G(\theta)\big) = a \int_\Omega \beta^*(x) \delta^*(x) \mathrm{d}x + C_G, \tag{27}$$

这里

$$C_G = \int_\Theta L_1(\theta, d_1) \mathrm{d}G(\theta), \quad \beta^*(x) = \int_\Theta \big[(\theta-\theta_0)^2 - \gamma_0^2\big] f(x \,|\, \theta) \mathrm{d}G(\theta).$$

可计算得

$$\beta^*(x) = P(x) f^{(2)}(x) - W(x) f^{(1)}(x) + \big(H(x) - Q(x)\big) f(x), \tag{28}$$

其中 $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ 分别是 $f(x)$ 的一阶和二阶导数，且

$$P(x)=\frac{(1+x^{\alpha})^2}{\alpha^2x^{2\alpha-2}},$$

$$W(x)=\frac{3\alpha x^{\alpha+1}(1+x^{\alpha})-(x^{-1}-2x^{1-\alpha})(\alpha-1)(1+x^{\alpha})}{\alpha^2x^{2\alpha}},$$

$$H(x)=3\theta_0^2-\gamma_0^2-\frac{(x^{\alpha}-2)(x^{\alpha}(2\alpha+1)-(1+\alpha))}{\alpha^2x^{2\alpha}}\theta_0,$$

$$Q(x)=\frac{(1-\alpha)(1+2x^{-\alpha})(1+x^{\alpha})^2}{\alpha^2x^{2\alpha}}-\frac{(\alpha-1)(x^{\alpha}-1)(2x^{\alpha}+1)}{\alpha^2x^{2\alpha}}+5,$$

则 Bayes 检验函数为

$$\delta_G^*(x)=\begin{cases}1, & \beta^*(x)\le 0,\\ 0, & \beta^*(x)>0.\end{cases}\tag{29}$$

其 Bayes 风险为

$$R^*(G)=\inf_{\delta^*}R(\delta^*,G)=R(\delta_G^*,G)=a\int_{\Omega}\beta^*(x)\delta_G^*(x)\mathrm{d}x+C_G.\tag{30}$$

同理可构造 β^* 的估计量为

$$\beta_n^*=P(x)f_n^{(2)}(x)-W(x)f_n^{(1)}(x)+\big(H(x)-Q(x)\big)f_n(x),\tag{31}$$

这里 $f_n^{(2)}(x)$, $f_n^{(1)}(x)$, $f_n(x)$ 仍为 $f^{(2)}(x)$, $f^{(1)}(x)$, $f(x)$ 的核估计，由 (13) 式决定。故由此定义 EB 判决函数为

$$\delta_n^*(x)=\begin{cases}1, & \beta_n^*(x)\le 0,\\ 0, & \beta_n^*(x)>0.\end{cases}\tag{32}$$

$\delta_n^*(x)$ 的全面 Bayes 风险为

$$R(\delta_n^*,G)=a\int_{\Omega}\beta^*(x)E\delta_n^*(x)\mathrm{d}x+C_G,\tag{33}$$

则可得到下面的关于 $\delta_n^*(x)$ 的渐近性和收敛速度的结论。

定理3　设 EB 检验函数 $\delta_n^*(x)$ 由 (32) 式定义，对于来自 Burr XII 的独立同分布序列 X_1, $X_2,\cdots$，在条件 (A_1), (A_2) 均成立时，对任意的 $x\in\Omega$，若满足

1) h_n 为一趋于零的正数序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}nh_n^5=\infty$;
2) $E\theta^2=\int_{\Theta}\theta^2\mathrm{d}G(\theta)<\infty$;
3) $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ 为 x 的连续函数，

则有

$$\lim_{n\to\infty}R(\delta_n^*,G)=R(\delta_G^*,G).$$

定理4　设 EB 检验函数 $\delta_n^*(x)$ 由 (32) 式定义，对于来自 Burr XII 的独立同分布序列 X_1, $X_2,\cdots$，在条件 (A_1), (A_2) 均成立时，当 $0<\lambda<1$，对任意的 $x\in\Omega$，若满足

$$\int_{\Omega}x^{(-l\alpha+r^*)\lambda}|\beta^*(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x<\infty,\quad l=1,2,\quad r^*=0,1,2,$$

则当取 $h_n = n^{-\frac{1}{1+2s}}$ 时有

$$R(\delta_n^*, G) - R(\delta_G^*, G) = O\Big(n^{-\frac{\lambda(s-1)}{1+2s}} \Big),$$

其中 $s \geq 3$ 为正整数。

注 定理3和定理4的证明方法类似与定理1和定理2，此处略去。

5 结论

本节将给出一个例子说明适合定理条件的分布和先验分布族是存在的。

设给定 θ 时随机变量 X 的分布为

$$f(x\,|\,\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}, \quad x > 0, \quad \theta > 0, \tag{34}$$

其样本空间为 $x \in \Omega = \{x\,|\,x > 0\}$，参数空间 $\Theta = \{\theta > 0 : \int_\Omega f(x\,|\,\theta)\mathrm{d}x = 1\}$。此时，密度函数为 L 型的，故取 θ 的 L 型的先验分布为 Gamma 分布的一个特例—指数分布

$$g(\theta) = \beta \mathrm{e}^{-\beta\theta} I_{[\theta>0]}, \tag{35}$$

此处 $\beta > 1$ 是参数。故有

$$f(x) = \beta(1+x)^{-1}\frac{1}{(\beta+\ln(1+x))^2},$$

$$\beta(x) = \beta(1+x)^{-1}\Big(\frac{2}{(\beta+\ln(1+x))^3} - \frac{\theta_0}{(\beta+\ln(1+x))^2} \Big),$$

$$\beta^*(x) = \beta(1+x)^{-1}\Big(\frac{6}{(\beta+\ln(1+x))^4} + \frac{4\theta_0}{(\beta+\ln(1+x))^3} - \frac{\theta_0^2-\gamma_0^2}{(\beta+\ln(1+x))^2} \Big).$$

于是有

$$|\beta(x)| \leq \frac{c_1}{(1+x)(\beta+\ln(1+x))}, \quad |\beta^*(x)| \leq \frac{c_2}{(1+x)(\beta+\ln(1+x))},$$

且满足下列条件

(a) $f(x)$ 为 x 的任意阶可微函数，具有连续导数且一致有界，即 $f(x) \in C_{s,\alpha}$；

(b) $E\theta = \int_0^\infty \theta g(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\beta} < \infty, \quad E\theta^2 = \int_0^\infty \theta^2 g(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\beta^2} < \infty$；

(c) $\int_\Omega x^{(-\alpha+r)\lambda}|\beta(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x < \infty, \quad r = 0, 1$；

(d) $\int_\Omega x^{(-l\alpha+r^*)\lambda}|\beta^*(x)|^{1-\lambda}\mathrm{d}x < \infty, \quad l = 1, 2, \quad r^* = 0, 1, 2,$

这里 $\lambda \in (0,1)$，事实上，条件 (c), (d) 的成立只需注意到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}(\beta+x)^{\lambda-1}\mathrm{d}x < \infty, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\lambda-2)x}(\beta+x)^{\lambda-1}\mathrm{d}x < \infty,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+2)x}(\beta+x)^{\lambda-1}\mathrm{d}x < \infty, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{(2\lambda-2)x}(\beta+x)^{\lambda-1}\mathrm{d}x < \infty,$$

即可。则由 (a)-(b) 可知，定理1-4的条件均满足。

参考文献：

[1] Burr I W. Cumulative frequency functions[J]. Ann Math Statist, 1942, 13(2): 215-232

[2] 张彩平. 三参数 Burr 分布的估计[D]. 华东师范大学硕士论文，2005
Zhang C P. Estimation and testing in the Burr distribution with three parameters[D]. Master's Thesis of East China Normal University, 2005

[3] Robbins H. An empirical Bayes approach to statistics[C]// Proc Third Berkely Symp Math Statist Prob, Berkeley: Univ of California Press, 1955, 1: 157-163

[4] Johns M V Jr, Van Ryzin J. Convergence rates in empirical Bayes teo-action problems I: discrete case[J]. Ann Math Statist, 1971, 42: 1521-1539

[5] Johns M V Jr, Van Ryzin J. Convergence rates in empirical Bayes teo-action problems II: continuous case[J]. Ann Math Statist, 1972, 43: 934-947

[6] 韦来生. 一类离散型单参数指数族参数的双侧的经验 Bayes 检验问题[J]. 应用概率统计，1991, 7(3): 299-310
Wei L S. Empirical Bayes two-sided test problems about one-parameter discrete exponential families[J]. Applied Probability and Statistics, 1991, 7(3): 299-310

[7] Wei L S. An empirical Bayes two-side test problem for continuous one-parameter exponential families[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 1989, 2(4): 369-384

[8] 陈家清，刘次华. 线性指数分布参数的经验 Bayes 检验问题[J]. 系统科学与数学，2008, 28(5): 616-626
Chen J Q, Liu C H. Empirical Bayes test problem for the parameter of linear exponential distribution[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 2008, 28(5): 616-626

[9] Evans' I G, Ragab A S. Bayesian inferences given a type-2 censored sample from a Burr distribution[J]. Communications in Statistics Theory and Methods, 1983, 12(13): 1569-1580

[10] Pathak P K, *et al.* Empirical Bayesian estimation of mean life from an accelerated life test[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1987, 16(3): 353-363

Empirical Bayes Test for the Parameter of Burr XII Distribution

WEI Cheng-dong[1],　CHEN Zhi-qiang[1,2],　WEI Shi[1],　SU Han[1]

(1- School of Mathematical Sciences, Guangxi Teachers' University, Nanning 530023;
2- Nanning Municipal Bureau of Statistics, Nanning 530028)

Abstract: The Burr XII distribution in economies, soeiology, euthenies and aetuaral statisties has very important value of application. It has often been used by aetuary, so it is significant to study the Burr XII distribution. The Empirical Bayes (EB) one-side and two-side test rules for the parameter of Burr XII distribution are constructed by using the kernel estimation in this paper. The asymptotically optimal property and convergence rates for the proposed EB test rules are obtained under suitable conditions. Finally, an example is given to show that the prior distribution satisfying the condition of the theorem exists.

Keywords: Burr XII distribution; kernel estimation; empirical Bayes test; asymptotic optimality; convergence rate

Received: 19 Nov 2008.　**Accepted:** 07 Sep 2009.

Foundation item: The Science Foundation of Guangxi (0575051; 0832108); the Innovation Project of Guangxi Graduate Education (2008106030701M05; 200910603R05).